



به نام خدای مهربان

آزمون میان‌ترم مدرسه‌ی تابستانه‌ی نجوم

۳۱ تیر ۱۳۸۹

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

۱. سیاره‌ای روی مدار بیضی با نیم‌قطر بزرگ a و خروج از مرکز ε در حرکت است. سیاره در نقطه‌ی A از مدار جایی که بردار شعاع آن عمود بر بردار خروج از مرکز \vec{e} است ($u = 90^\circ$)، سیارکی را در امتداد بردار سرعت (\vec{V}_A) خود مشاهده می‌کند. در نقطه‌ای دیگر از مدار (نقطه‌ی B) دوباره سیارک در امتداد بردار سرعت سیاره (\vec{V}_B) قرار می‌گیرد، اگر \vec{V}_A عمود بر \vec{V}_B باشد و سیارک در فضا همواره ثابت باشد.
- الف) زاویه برادر \vec{V}_A با بردار \vec{e} را بر حسب مفروضات مسئله دست آورید.
- ب) فاصله‌ی ستاره را از کانون نزدیک به حضیض حساب کنید.
- ج) \vec{r}_B بردار شعاع سیاره در نقطه B را حساب کنید.
۲. الف) با فرض اینکه گاز داخل ستاره از معادله پلوتروپیک به شکل
- $$P = K\rho^\gamma$$
- تبعیت می‌کند که در آن K و γ مقادیری ثابت‌اند. رابطه‌ی جرم و شعاع را بدست آورید.
- ب) نشان دهید که معادله حالت توده‌ای از گاز با جرم ثابت که در حال انقباض گرانثی آرام (تعادل کلومین هلم هولتز) است، به شکل پلوتروپیک با نمای $\gamma = \frac{4}{3}$ است.
۳. عبدالرحمن صوفی رازی (۳۷۶ - ۲۹۱ هجری قمری؛ ۹۸۶ - ۹۰۳ میلادی)، در سال ۳۵۳ هجری قمری (۹۶۴ میلادی) کتاب «صورالکواکب» را به پایان رساند. او در این کتاب، ضمن بررسی صورت‌های فلکی مختلف، جدولی از پر نورترین ستارگان هر صورت فلکی آورده است. در این جدول برای هر ستاره قدر ظاهری و طول و عرض دایره البروجی ذکر شده است. در مجموع کتاب او دربردارنده‌ی ۱۰۲۷ ستاره است که در بین آنها به حدود ۱۰ جرم غیر ستاره‌ای (کهکشانش آندرومدا، خوشه‌ی دوگانه، خوشه‌ی کندو و ...) به عنوان سحابی اشاره شده است.



به عنوان نمونه او اطلاعات آلفای برساوش ($\alpha - per$) را به صورت زیر ثبت کرده است :

طول دایره البروجی	47°32'
عرض دایره البروجی	+30°31'
قدر ظاهری	2

ماهواره ابرخس در سال ۱۹۹۱ میلادی آلفای برساوش را با دقت رصد کرد و مختصات زیر را ثبت کرد.

بعد (درجه)	51.08061917
میل (درجه)	+49.86124305
حرکت ویژه در راستای بعد (ثانیه قوسی بر سال)	0.02375
حرکت ویژه در راستای میل (ثانیه قوسی بر سال)	-0.02623
قدر ظاهری	1.8972

خطای صوفی را در اندازه گیری طول و عرض دایره البروجی آلفای برساوش محاسبه کنید. (تمایل مدار زمین نسبت به استوا را ۲۳.۵ درجه بگیرید)

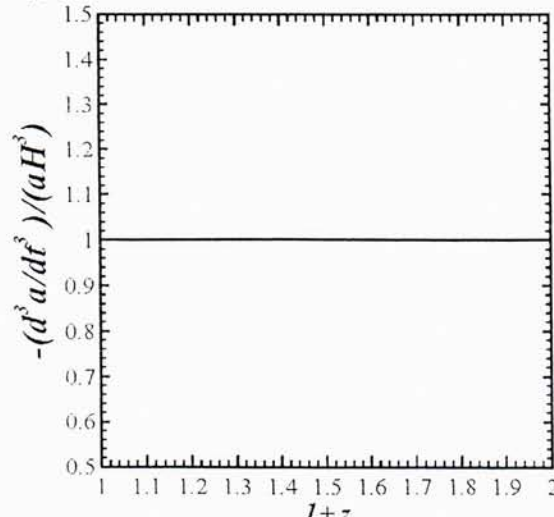
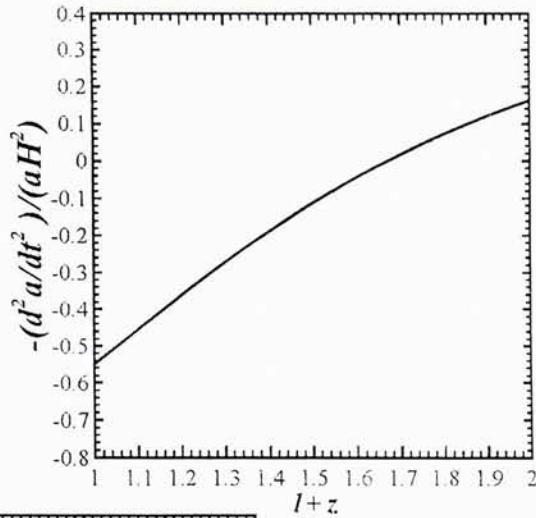
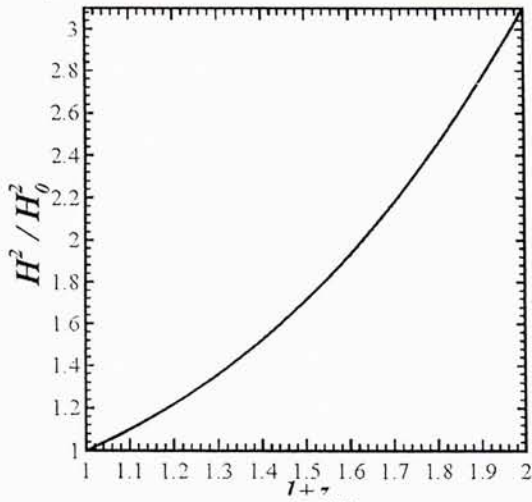
۴. در این مساله قصد داریم با توجه به فراوانی عناصر رادیواکتیوی مانند ^{235}U و ^{238}U سن برخی از اجرام کیهانی را تخمین زده و با کمک آن مدول فاصله $\mu \equiv m - M$ را تعیین کنیم. برای این کار به رابطه تلاشی مواد رادیواکتیو به صورت $A(T) = A_{in} \exp(-\lambda T)$ توجه می‌کنیم. در این رابطه A_{in} فراوانی اولیه ماده، $A(T)$ فراوانی در زمان T و λ آهنگ تلاشی می‌باشد. از آنجا که فراوانی اولیه مواد معمولاً با عدم قطعیت بزرگی همراه است بر این اساس اندازه‌گیری سن با توجه به فراوانی نسبی دو عنصر مختلف انجام می‌گیرد. فرض کنید ^{238}U و ^{235}U به ترتیب دارای آهنگ تلاشی $0.971 \times 10^{-9}/yr$ و $0.154 \times 10^{-9}/yr$ باشند.
- در جدول زیر فراوانی نسبی کنونی $\frac{A_T^{235}}{A_T^{238}}$ و سن تخمینی برای تعدادی از اجرام کیهانی که در انتقال به سرخ‌های مختلفی قرار گرفته‌اند، آمده است. با فرض اینکه تمام سن‌های محاسبه شده دارای خطای پواسونی باشند.
- الف) فراوانی نسبی اولیه $\frac{A_{in}^{235}}{A_{in}^{238}}$ و خطای آن را برای اجرام ذکر شده در جدول زیر را حساب کنید.
- ب) حد بالای انتقال به سرخ این اجرام و خطای آن را بیابید. (بسط را تا مرتبه دوم در نظر بگیرید)
- ج) فاصله درخشندگی D_L را محاسبه نمایید (طول همراه را تا مرتبه دوم بسط بر حسب انتقال به سرخ در نظر بگیرید)
- د) مدول فاصله $\mu \equiv m - M$ و خطای مربوط به آن را محاسبه نمایید.

ه) در کیهانی با هندسه‌های غیر تخت یعنی $\Omega_K = -0.1$ و $\Omega_K = 0.5$ ، مدول فاصله برای این اجرام چقدر خواهد بود؟

شماره جرم کیهانی	$\frac{A_T^{235}}{A_T^{238}}$	سن (میلیارد سال)
۱	۰/۰۰۰۰۷۸	۱۳/۳۱
۲	۰/۰۰۰۰۹۳	۱۲/۷۳
۳	۰/۰۰۰۰۶۵	۱۲/۰۴
۴	۰/۰۰۰۰۴۳	۱۱/۴۰
۵	۰/۰۰۰۰۲۱	۱۰/۷۸

مقادیر و شکل‌های مورد نیاز:

سن کیهان ما برابر با $t_0 = 13.46 \text{ Gyr}$ است. $H_0 = 70 \text{ km/sMpc}$ و $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$



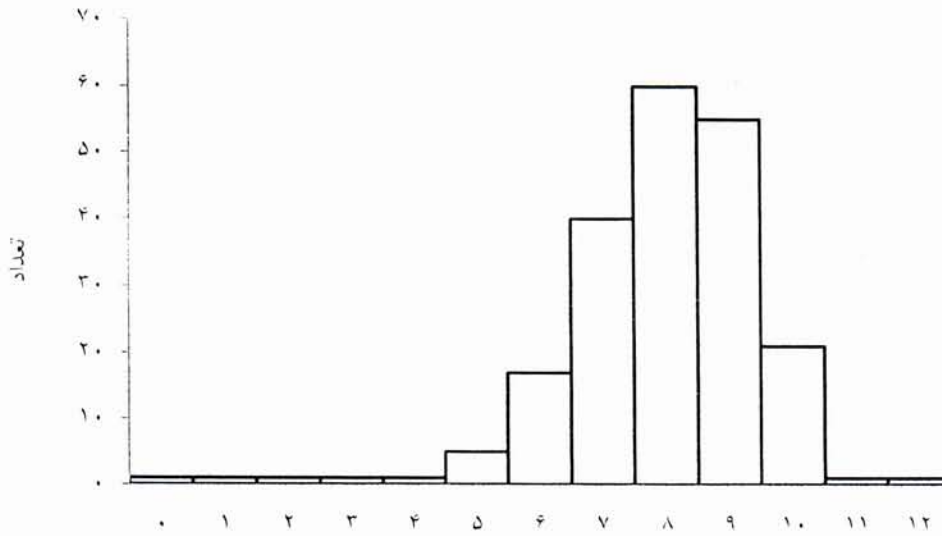
به نام خدای مهربان

آزمون میان‌ترم تحلیل داده مدرسه‌ی تابستانه‌ی نجوم

۶ مرداد ۱۳۸۹

مدت آزمون: ۱۸۰ دقیقه

۱. از یک ناحیه‌ی آسمان به ابعاد $14/1 \times 14/1$ درجه مربع در فیلتری خاص عکس گرفته‌ایم و در این عکس اخترش‌هایی^۱ تا قدر ۲۰ را مشخص کرده‌ایم. اخترش‌ها را به دو دسته‌ی با انتقال به سرخ کمتر از یک و بیشتر از یک تقسیم می‌کنیم. چگالی سطحی اخترش‌هایی که انتقال به سرخ کمتر از یک دارند را، در همه نقاط عکس به کمک شبکه‌بندی با خانه‌هایی به عرض و طول یک درجه حساب می‌کنیم. نمودار زیر فراوانی خانه‌های شبکه را بر حسب چگالی سطحی آنها نشان می‌دهد. جدول زیر نشان دهنده ارتفاع ستون‌ها و خطای اندازه‌گیری آنها است. (چگالی سطحی = تعداد اخترش‌ها بر درجه مربع روی عکس است).



تعداد اخترش‌های با انتقال به سرخ کمتر از یک در هر درجه مربع



چگالی سطحی خانه های شبکه	فراوانی
۰	1 ± 1
۱	1 ± 1
۲	1 ± 1
۳	1 ± 1
۴	1 ± 1
۵	1 ± 1
۶	17 ± 1
۷	40 ± 1
۸	60 ± 1
۹	55 ± 1
۱۰	21 ± 1
۱۱	1 ± 1
۱۲	1 ± 1

خطای دستگاه در شمردن تعداد اختروش در هر ستون معلوم است.

محاسبه خطا برای سوال های الف تا د الزامی است.
در هر قسمت، استدلال های خود را برای استفاده از هر فرمول یا انتخاب روشی خاص به دقت توضیح دهید.
نیازی به اثبات فرمول های گفته شده در کلاس نیست.

الف) مطابق با این نمونه برداری آماری، احتمال این که یک اختروش دارای انتقال به سرخ کمتر از یک باشد چقدر است؟

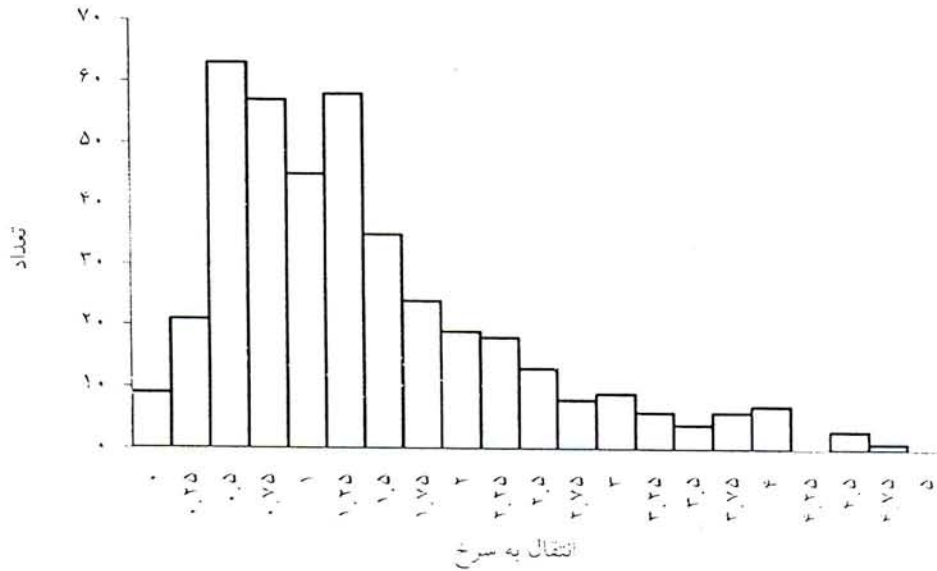
ب) تعداد کل اختروش های رصد شده چند تا بوده است؟

ج) میانگین تعداد اختروش های با انتقال به سرخ کمتر از یک در هر درجه از آسمان چقدر است؟

د) در یک عکس دیگر به ابعاد $14/1 \times 14/1$ درجه مربع، ۲۰۰ اختروش تا قدر ۲۰ را تشخیص داده ایم. تعداد اختروش های با انتقال به سرخ کمتر از یک را در این عکس تخمین بزنید.



ه) حداقل از چه مساحتی از آسمان، باید عکس بگیریم تا با احتمال ۹۵٪ قطعیت یک اختروش با انتقال به سرخ کمتر از یک در عکس وجود داشته باشد؟
و) نمودار زیر که با بهره‌گیری از داده‌های چندین تلسکوپ در چندین فیلتر مختلف بدست آمده است، توزیع تعداد اختروش‌ها را بر حسب انتقال به سرخ نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار توضیح دهید که آیا نتیجه‌ی بدست آمده در قسمت الف با این نمودار سازگار است؟ در هر حالت (جواب بلی یا خیر) دلیل پاسخ خود را شرح دهید.





به نام خدای مهربان

آزمون پایانی مدرسه‌ی تابستانه‌ی نجوم

۱۷ مرداد ۱۳۸۹ مدت آزمون: ۲۲۵ دقیقه

۶۰ دقیقه

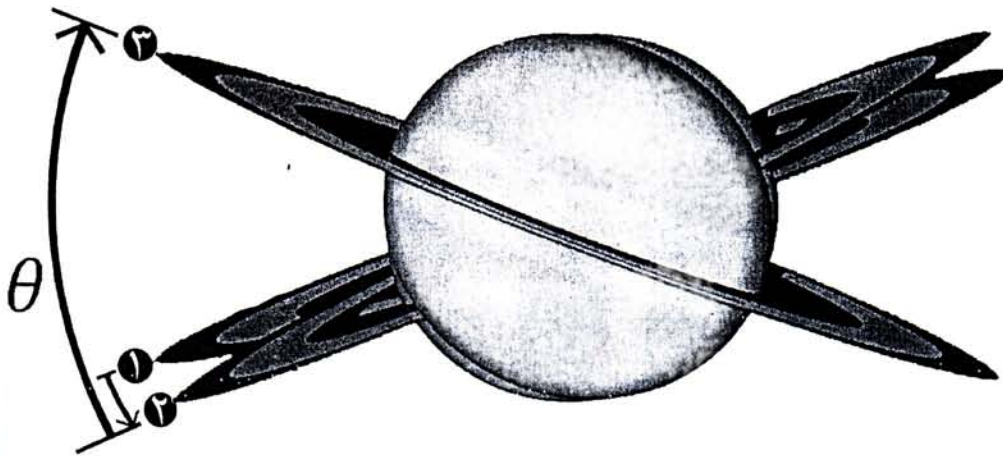
۱. در این مسأله می‌خواهیم از روی درخشندگی ابرنواخترهای نوع Ia انبساطِ عالم را مطالعه نماییم. این کار را با کمک مساحت Gold که دارای خطای سیستماتیک 0.05 در اندازه‌گیری درخشندگی ظاهری ابرنواخترها می‌باشد، انجام می‌دهیم. در جدول زیر انتقال به سرخ و مدول فاصله چند ابرنواختر به همراه خطای آنها داده شده است. الف) مقدار کمیت کُندشوندگی $q(t = t_0) = -(\ddot{a}/aH)_0$ و خطای مربوط به آن را حساب کنید. ب) با فرض اینکه مقدار چگالی نسبی کلِ عالم در زمان فعلی، $\Omega_{total}(t = t_0) = 1.01 \pm 0.05$ باشد پارامتر حالت W و خطای آن را حساب کنید. سن کیهان ما برابر با $t_0 = 13.46 \text{ Gyr}$ است. $H_0 = 70 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. سرعت نور را $3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ در نظر بگیرید.

Redshift	μ	$\Delta\mu$
0.023	35.24	0.16
0.024	35.09	0.22
0.025	35.24	0.16
0.026	35.52	0.13
0.027	35.9	0.21
0.028	35.53	0.22
0.029	35.91	0.15
0.03	35.9	0.21
0.031	35.84	0.21
0.032	36.08	0.2

۶۰ دقیقه

۲. دو ماهواره به جرم‌های m_1 و m_2 بر گرد زمین در حرکتند. مدار حرکت m_1 دایره‌ای به شعاع R و مدار حرکت m_2 بیضی شکل است. دو مدار در دو نقطه مشترکند و جهت حرکت هر دو پادساعتگرد است. نسبت دوره‌ی تناوب دو مدار $T_2/T_1 = n$ است و زاویه بین صفحه مدار دو ماهواره برابر است با θ . الف) مشخصات مدار بیضی، a و e را بدست آورید. ب) اگر وقتی m_2 بر یکی از نقاط مشترک دو مدار قرار دارد، m_1 بر نقطه‌ی اشتراک دوم قرار داشته باشد، زاویه ای که راس آن زمین و دو ضلع آن بر دو ماهواره قرار گرفته پس از گذشت نیم دور تناوب m_2 چقدر خواهد شد؟

۳. ناظری در شهر یاکوتسک روسیه ($\phi = 62^{\circ}02'$)، با تلسکوپی با استقرار سمتی - ارتفاعی سیاره ی زحل را با میل $00^{\circ}58'$ مشاهده می کند که ابتدا در وضعیت شماره ی ۱ قرار دارد. با گذشت زمان حلقه ی زحل به صورت پادساعتگرد می چرخد و پس از گذشت مدتی به وضعیت ۲ می رسد. بعد از این حالت، حلقه به صورت ساعتگرد می چرخد. زاویه ای که در هر لحظه نسبت به وضعیت ۲ چرخیده است را با θ نمایش می دهیم. θ نهایتاً به چه مقداری می رسد؟



۴. ستاره ای را در نظر بگیرید که سرتاسر تابشی است با کدورت ثابت و هیچ منبع تولید انرژی ندارد. گاز داخل ستاره به خاطر دمای زیاد، گاز کامل و پلی تروپیک با نمای γ است. شکل تابع چگالی $\rho(r)$ را برای این ستاره به دست آورید. r فاصله از مرکز ستاره است.

روابطی که ممکن است در حل این سوال به شما کمک کنند.

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = -4\pi r^2 \rho(r)$$

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{3L(r) \kappa \rho(r)}{16\pi r^2 acT^3}$$

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon \rho(r)$$

به نام خدای مهربان

آزمون پایانی تحلیل داده مدرسه‌ی تابستانه‌ی نجوم

مدت آزمون: ۱۸۰ دقیقه

۱۸ مرداد ۱۳۸۹

۱. هر کهکشان مارپیچی از سه ناحیه‌ی هسته^۱، دیسک^۲ و هاله^۳ تشکیل شده است. در نمودار شماره (۱) شدت روشنایی بهنجار شده‌ی یک کهکشان مارپیچی را بر حسب شعاع رسم کرده‌ایم. به عنوان یک تقریب شعاع هسته‌ی کهکشان (R_c) فاصله‌ای است که شدت نور کهکشان به ۰.۶ مقدار بیشینه خود می‌رسد. فرض کنید که ناحیه‌ی دیسک (مرئی) کهکشان تا شعاع $R_L = 50 \text{ kpc}$ باشد و هاله کهکشان تا فاصله $R_T = 80 \text{ kpc}$ ادامه داشته باشد. در نمودار (۲) مکان ۲۰ ستاره (بر حسب کیلو پارسک) را در داخل کهکشان مشخص کرده‌ایم. سرعت دوران (بر حسب کیلومتر بر ثانیه) هر یک از این ستاره‌ها به دور مرکز کهکشان را با دقت $0.1 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ اندازه‌گیری کرده و نتیجه آن را در جدول زیر آورده‌ایم.

شماره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
سرعت	17.5	34.4	49.9	63.9	76.1	86.5	109.1	116.6	124.0	128.2
شماره	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
سرعت	131.5	135.6	138.0	139.9	140.7	142.0	142.3	143.1	143.5	144.1

جدول شماره (۱)

همچنین با استفاده از یک مدل نظری به رابطه‌ای برای سرعت دوران ستاره‌ها به دور مرکز کهکشان رسیده‌ایم.

$$V = V_{\infty} \left[1 + \left(\frac{R_c}{R} \right)^2 \right]^{-\alpha}$$

در این رابطه α یک ثابت مثبت، R_c شعاع هسته کهکشان و V_{∞} سرعت دوران ستاره‌ها در فاصله‌های دور از هسته‌ی کهکشان است. همان‌گونه که از این رابطه و مقادیر سرعت در جدول (۱) معلوم است سرعت دوران ستاره‌ها با افزایش فاصله به مقدار ثابتی میل می‌کند که این نشانه‌ی وجود جرم تاریک در کهکشان است.

الف) R_c را اندازه‌گیری کنید و خطای آن را بنویسید.

ب) V_{∞} را بدست آورید و خطای آن را بنویسید.

ج) با استفاده از داده‌های جدول (۱)، شکل (۲) و برازش یک منحنی (از نوع مناسب) به این داده‌ها، مقدار α و خطای آن را بدست آورید.

¹ Bulge

² Disk

³ Halo



۵) در کاغذ میلی متری داده شده، نمودار V-R شامل داده‌ها، خطای آنها و منحنی برازش شده را رسم کنید.

۵) جرم کل یک کهکشان را (با در نظر گرفتن هاله کهکشان) می‌توان از روی منحنی سرعت دوران کهکشان بدست آورد. اگر جرم روشن این کهکشان را برابر $2 \times 10^{41} \text{ kg}$ فرض کنیم، مقدار جرم تاریک آن را بدست آورید.

ثابت های مورد نیاز: $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ و $1 \text{ pc} = 3.09 \times 10^{16} \text{ m}$